ت- خصائص التوزيع الثنائي

التوقع (الوسط الحسابي) والتباين: يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية (ثنائية) $X = X_1 + \dots X_i + \dots + X_n$ لها نفس المعلم p وبالتالي نفس التوقع $(E(X_i) = p)$ أيضا. إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

$$\mu=E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\, p(x)$$

او

$$\mu=E(X) = \Sigma E(X_i) = \Sigma p_i = n\, p \quad => \quad \mu = E(X) = np$$ الوسط الحسابي

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n),$$

X_i مستقلة إذن فالتباين

$$V(X) = \Sigma V(X_i) = \Sigma pq \quad => \quad V(X) = npq$$

او

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

مثال: أحسب التوقع والتباين لتجربة رمي قطعة النقود 4 مرات

x	0	1	2	3	4
f(x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

الحل:

$$\mu=E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\, p(x)$$

$$=0(1/16) + 1(4/16) + 2(6/16) + 3(4/16) + 4(1/16) = 2$$

او

$$\mu=E(X)= np$$

$$= 4\,(1/2) = 2$$

والتباين

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2\, p(x) - \mu^2$$

$$= [0^2(1/16) + 1^2(4/16) + 2^2(6/16) + 3^2(4/16) + 4^2(1/16)] - 2^2 = \frac{80-64}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

او

$$V(X) = npq = 4(1/2)(1/2) = 1$$

معامل التماثل

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \qquad \mu_3 = \sum (x-\mu)^3 p(x) = \sum (x-np)^3 p(x) = \ldots = npq(q-p)$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = \frac{npq[(1-p)-p]}{npq\sqrt{npq}} = \frac{1-2p}{\sigma} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

ليكون منحنى التوزيع الثنائي متماثلا عندما يكون $\alpha_3 = 0 \Rightarrow \Rightarrow p = ½$

معامل التفلطح

$$\beta = 3 + \frac{1-6pq}{\sqrt{npq}}$$

ليكون منحنى التوزيع معتدلا عندما يكون $\beta = 3 \Rightarrow qp = 1/6$

15 التوزيع الثنائي السالب (باسكال) Négative Binomial Distribution

أ- استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي السالب:

مثال: نرمي قطعة نقود إلى غاية الحصول على 3 مرات صورة (متتالية أو لا). أحسب احتمال أن نحصل على ذلك بعد 5 رميات، 4 رميات، 3 رميات، توقع عدد الرميات اللازمة وأحسب التباين.

من جديد ليكن لدينا تجربة برنولية (نتيجتين نجاح وفشل) مكررة، لكن هذه المرة إلى غاية الحصول على عدد معين (r) من النجاحات. X في هذه الحالة هي عدد مرات تكرار التجربة إلى غاية الحصول على r نجاح.

كيف يحسب الاحتمال ؟ نعلم أن تحقق النجاح r مرة احتماله p^r واحتمال الفشل x-r مرة يساوي q^{x-r} . إذا الاحتمال المطلوب يتضمن ضرب هذين الاحتماليين $p^r q^{x-r}$. لكن هناك عددا من الطرق الملائمة

45-78

لتحقيق r نجاح من بين X تجربة مع العلم أن آخر تجربة هي نجاح. هذا العدد يساوي إذا عدد الطرق الملائمة لاختيار r-1 نجاح من بين x-1 تجربة $\binom{x-1}{r-1}$ (التجربة الأخيرة معلومة النتيجة).

$$P(X=r)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{(x-r)} \quad ; x=r, r+1, r+2, \dots, r=1,2,\dots,+\infty$$

يسمى هذا التوزيع توزيع باسكال أو الثنائي السالب ونكتب: X~B (N, r, p)

يمكن إذا الإجابة على أسئلة المثال السابق بما يلي:

$$P(X=5)=\binom{5-1}{3-1}p^3 q^{5-3}=\binom{4}{2}(½)^3(½)^2=6\,(1/8)\,(1/4)=9/32$$

$$\mu=r/p=3/(1/2)=6\ ,\quad \sigma^2=rq/p^2=3\,(1/2)\,/\,(1/2)^2=12/2=6$$

ب- خصائص التوزيع الثنائي السالب

$$\mu=\frac{r}{p} \qquad\qquad \sigma^2=\frac{rq}{p^2}$$

16 التوزيع المتعدد Distribution multinomiale

أ- استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي المتعدد

مثال. نرمي قطعة نرد 4 مرات. أوجد احتمال الحصول على مرتين الرقم 6 ومرتين الرقم 1.

التوزيع المتعدد هو تعميم للتوزيع الثنائي، فبينما الأول يستعمل في حالة تجربة تقبل نتيجتين فقط. يستعمل التوزيع المتعدد للحالة العامة حيث يكون للتجربة عدد k من النتائج الممكنة. مع استقلالية التجارب عن بعضها. نرمز لهذه النتائج ب $A_1, A_2, \dots A_k$ ولاحتمالاتها ب $p_1, p_2, p_3, \dots p_k$. بما إن الأحداث (النتائج) Ai متنافية فإن:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 1$$

إذا كررنا هذه التجربة **متعددة** النتائج عدد n من المرات فسيكون لدينا لكل حدث (نتيجة) متغيرة عشوائية تمثل عدد مرات وقوعه. نرمز لهذه المتغيرات ب$X_1, X_2, \dots X_k$ حيث $X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$.

يحسب احتمال الحدث المركب: $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k$ كما يلي :

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}}$$

ب- خصائص التوزيع المتعدد

$$E(X_1) = np_1,\ E(X_2) = np_2,\ \dots,\ \mathbf{E(X_k) = np_k}$$

$$V(X_1) = np_1q_1,\ V(X_2) = np_2q_2,\ \dots\ \mathbf{V(X_k) = np_kq_k}$$

توزيع بواسون Poisson Distribution

هو من التوزيعات المتقطعة والتي عادة ما تستخدم للحوادث النادرة الحدوث كانخفاض درجات الحرارة في صحراء او هطول المطر فيها او للفياضات في الانهر والتي تعتبر متغيرات عشوائية
اذا اجريت تجربة عدد n من المرات ومعدل النجاحات خلال وحدة زمنية محدد[ة (ساعة يوم شهر وما الى ذلك) هو λ.
فان احتمال وقوع الحدث هو

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{x}}{x!}$$

شروط استخدام توزيع بواسون

1. يكون للتجربة نتيجتان فقط
2. ان يكون احتمال النجاح صغير في اغلب التجارب (كون الحدث نادر).
3. ان يعطى متوسط النجاحات خلال فترة او وحدة زمنية (λ) $\lambda = n.p$
4. يقترب توزيع ذي الحدين من توزيع بواسون اذا كانت نسبة النجاح تقترب من الصفر وعدد التجارب كبير.

$$\mu = E(x) = V(x) = \sigma^2 = \lambda \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad \beta = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

17 توزيع بواسون Poisson Distribution

أ- استنتاج صيغة قانون توزيع بواسون

لتكن لدينا تجربة برنولية مكررة عدد كبير جدا أو لانهائي من المرات. مبدئيا المتغيرة X التي تمثل عدد النجاحات تتبع التوزيع الثنائي، لكن قد يصعب حساب الاحتمال باستعمال صيغة هذا التوزيع عندما تكون n كبيرة. مثلا إحتمال 20 نجاح إذا كانت $n = 100$ هو: .

$$P(20) = \binom{100}{20} 0.001^{20}\, 0.999^{80}$$

عندما تتكرر التجربة باستمرار؛ يصبح عدد مرات تكرار التجربة مقاسا بالزمن، ويكون احتمال تحقق الحدث في لحظة زمن صغيرة جدا. نحتاج في هذه الحالة إلى إيجاد صيغة عامة تعادل صيغة التوزيع الثنائي عندما n يؤول إلى ∞ .

نضع λ ثابت بحيث $p = \lambda/n$:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$p(x) = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$p(x) = \frac{\frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\,\frac{(n-2)}{n}\,.....\,\frac{(n-x+1)}{n}}{x!}\lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}\lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{2}{n} = ... = 0 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{x!}\lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

لكن : $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-1}$ وبما أن $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = (1-0)^{-x} = 1$ فإن:

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

و هو احتمال x نجاح في وحدة زمن واحدة حسب توزيع بواسون حيث **$\lambda > 0$**. ونكتب **$X \sim P(\lambda)$**

ملاحظة:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828...$$

مثال: اذا كان متوسط عدد ايام توقف مصنع معين للصيانة بسبب سوء الاجواء هو 5 فما هو احتمال ان المصنع سيتوقف عن العمل لمدة 8 ايام خلال موسم العمل.

X=8 و $\lambda = 5$

$$P(x = 8) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-5}.(5)^{8}}{8!} = 0.065$$

مثال: اذا كان معدل العبوات المعابة في انتاج معمل لعبوات الماء في الساعة الواحدة هو 2 فما احتمال

A. ان يتم انتاج 4 وحدات معابة في الساعة.

B. ان لا تظهر اي عبوة معابة في النماذج المنتجة .

X=4 , $\lambda = 2.$

$$P(x = 4) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2}.(2)^{4}}{4!} = 0.135$$

مثال: اذا كانت نسبة الوحدات المعابة في انتاج نوع معين من القطع المعدنية هي 0.03 وان عدد الوحدات المعابة يتبع توزيع بواسون لنفرض انه تم سحب 10 اجهزة فما هو احتمال

اولاً: الحصول على جهاز واحد معاب.

ثانياً: الحصول على جهاز واحد معاب على الاقل.

ج/اولا:

$$\lambda = 10 * 0.03 = 0.3$$

$$P(x = 1) = \frac{e^{-0.3}.(0.3)^1}{1!} = \frac{e^{-0.3}.(0.3)^1}{1!} = 0.222$$

جواب/ ثانياً:

$$P(x \leq 1) = \frac{e^{-0.3}.(0.3)^1}{1!} + \frac{e^{-0.3}.(0.3)^0}{0!} = 0.963$$

H.W: من خلال دراسة منطقة صحراوية لمئة عام تبين انها امطرت ب 90 مرة فقط. اذا كان توزيع بواسون هو نموذج مناسب لهذه الدراسة فما هو احتمال.

اولاً: سقوط المطر خلال سنة واحدة قادمة.

ثانياً: سقوط المطر خلال الـــ 7 سنوات القادمة.

ت- حساب احتمال عدد من الأحداث في t وحدة زمن.

من أجل عدد أو مقدار t من وحدات الزمن نعوض λ ب λt فنجد:

$$P_t = (X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad X = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

مثال. بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ=5 في الثانية. أحسب احتمال وصول 7 مكالمات في ثانية ونصف.

$$t\lambda = 1.5(5) \qquad P(X = 7) = \frac{(1.5(5))^7 e^{-1.5(5)}}{7!}$$

ث- حساب احتمال عدد من الأحداث من فئة معينة.

إذا كان X يتبع توزيع بواسون بمعدل λ، فإن Y= aX هو الآخر يتبع توزيع بواسون بمعدل aλ.

مثال. بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ=5 في ثانية، وأن **5%** من هذه المكالمات هي مكالمات دولية. أحسب احتمال أن تصل 9 مكالمات دولية في ثانية.

$$P(X = 9) = \frac{(0.05(5))^9 e^{-0.05(5)}}{9!}$$

ج- استخدام توزيع بواسون بدلا من التوزيع الثنائي.

عندما $n \to \infty$ والمتوسط ثابت يؤول التوزيع الثنائي إلى التوزيع بواسون. عمليا يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما:

$$n \geq 30 \text{ و } \quad np < 5 \quad \text{أو} \quad nq < 5$$

ويستخدم بعض من الإحصائيين أيضا كشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي القاعدة التالية[1]:

$$n \geq 25 \text{ و } \quad p \leq 0,1$$

مثال : نأخذ عشوائيا 10 وحدات من انتاج آلة نسبة إنتاجها التالف 10 % . أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} (0,1^2)\,(0.9^8) = \mathbf{0.1937}$$

<u>باستعمال توزيع بواسون:</u> نحسب أولا قيمة المعلمة λ (معلمة قانون بواسون):

$$\lambda = \mu = np = 10 * 0,1 = 1$$

$$P(2) = \lambda^x * e^{-\lambda}/x! = (1^2 * e^{-1}) / 2\,! = 1/(2e) = \mathbf{0.1839}$$

التوزيع الطبيعي Normal Distribution (فص10)

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفا من المارين في شارع ما وقسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. ومثل هذا بالنسبة للأوزان. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل8) :

أ- صيغة القانون

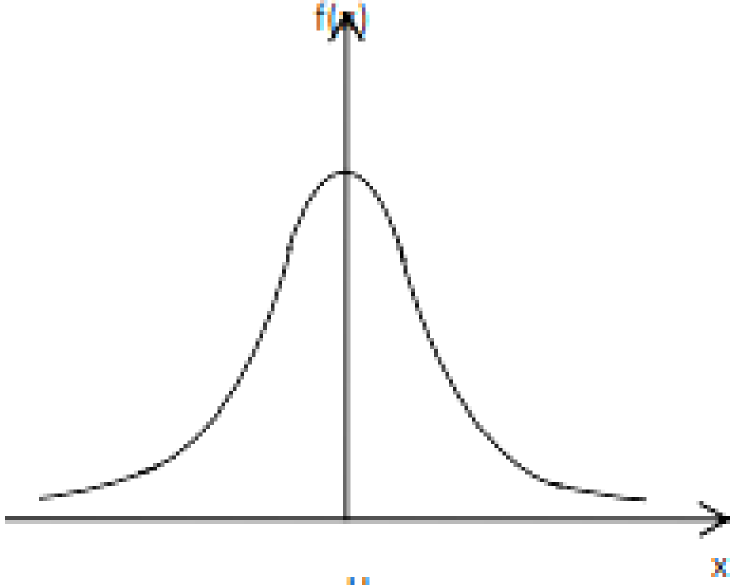
تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty<x<\infty}$$

حيث μ و σ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري.

دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي:

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-1/2\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2}dv$$



رسم 5 الشكل العام للتوزيع الطبيعي

المتغير المركزي أو القياسي : يستخدم المتغير القياسي Z = (X-μ)/σ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

$$F(z) = P(Z \leq z), \quad \text{أو} \quad P(0 \leq Z \leq z)$$

حيث تسمح بكتابة الدالة f و F بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x و μ و σ وذلك كما يلي:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty}$$

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z، فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي. ونعلم أن:

$$\mathbf{E(Z)=\mu = 0 \;\; ; \quad V(Z)= \sigma^2 = 1}$$

ب- خصائص التوزيع الطبيعي

من خصائص التوزيع الطبيعي أنه يعتبر معتدلا لا مدببا ولا مفلطحا، حيث يعتبر معامل التفلطح ß = 3 للتوزيع الطبيعي معيارا لاعتدال المنحنيات.

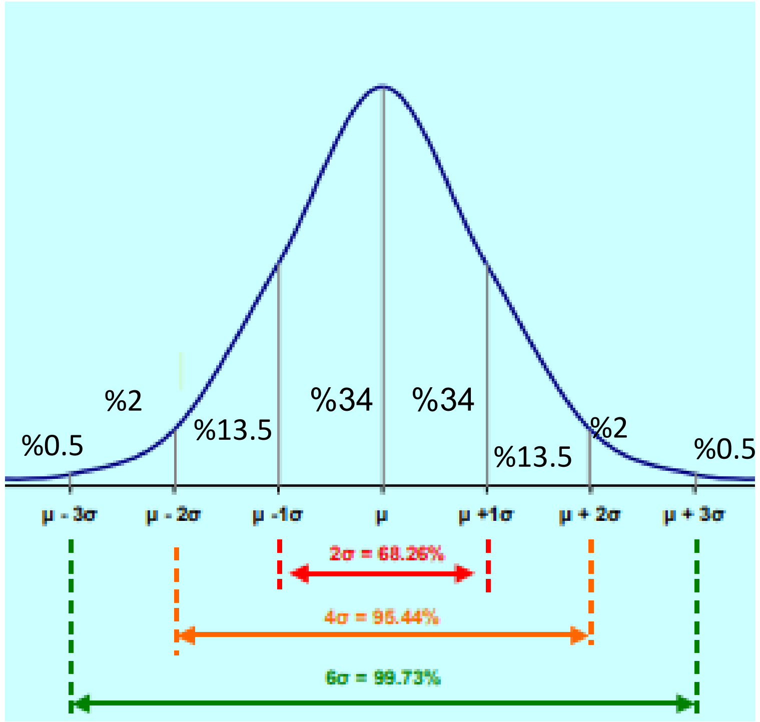
من خصائص التوزيع الطبيعي أيضا أنه متماثل حول $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$ القيمة المتوقعة

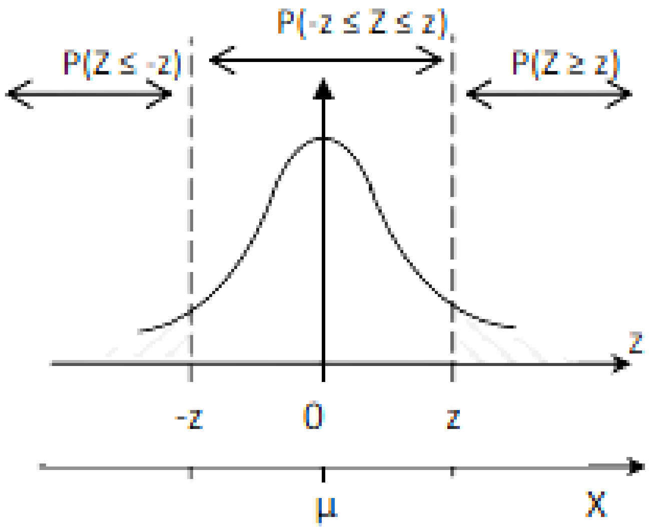
تماثل منحنى X حول المتوسط (أنظر الشكل 9) يعني تماثل لمنحنى Z حول 0، مما يعني أنه من أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية

$$z > 0:$$

$$P(0 \leq Z \leq z) = P(-z \leq Z \leq 0) = P(-z \leq Z \leq z) / 2$$

$$P(Z \leq -z) = 1- P(Z \leq z) = P(Z \geq z)$$





رسم 9 استخدام تماثل التوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات

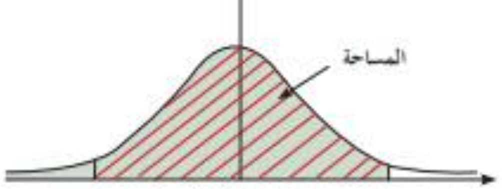
و لقد تم باستخدام المتغير المعياري Z حساب الاحتمالات (المساحات) تحت المنحنى ومنها خاصة:

$$P(-\sigma \le X \le \sigma) = P(-\sigma \le Z \le \sigma) = 0.6837,$$

$$P(-2\sigma \le X \le 2\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) = 0.9544,$$

$$P(-3\sigma \le X \le 3\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973.$$

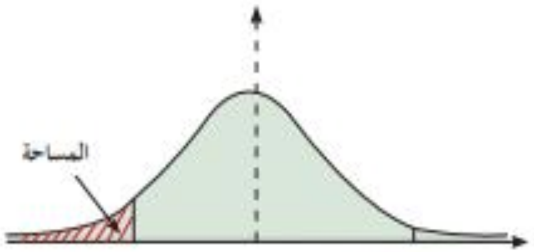
هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصائية التي نجدها في الكثير من المراجع، كما يمكن حسابها باستخدام الحاسوب.



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

جدول (4)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

مثال: باستعمال الجداول الاحصائية (1 أحسب : $P(0 \le Z \le z)$ حيث $z = 1, 2, 3$

(2 أحسب $P(-z \le Z \le z)$ من أجل نفس القيم ل z.

$$P(z=0) = 0.5 \quad from\ the\ table$$

$$P(z=1) = 0.8413 \quad from\ the\ table$$

$$P(0 \le Z \le 1) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413 \quad from\ the\ table$$

النتائج:

(1 0.3413 ، 0.47725 ، 0.49865

(2 0.6827، 0.9545، 0.9973

مثال:

إذا كان لديك توزيع طبيعي وسطه ($\mu = 18$) وانحرافه القياسي ($\sigma = 2.5$) جد:

أ- $P(y < 15)$: ب- قيمة k بحيث ان $0.2578 = P(y < k)$: ج- $P(17 < y < 21)$.

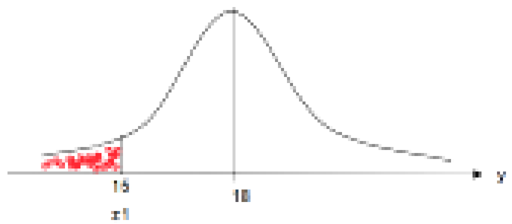
الحل: المعطيات

$$\mu = 18 \quad ; \quad \sigma = 2.5 \quad ;$$

أ- $P(y \le 15) = ?$

$Z_1 = \frac{15-18}{2.5} = -1.2$; $P(y \le 15) = p(z \le -1.2)$

من الجدول = 0.1151

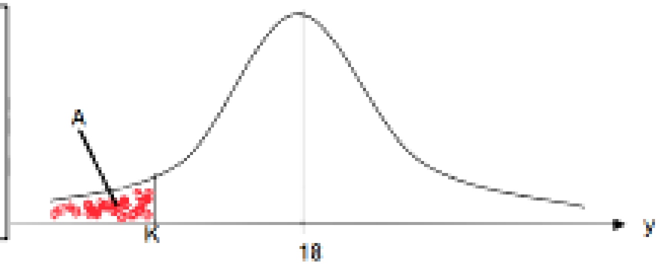


ب- من المعطيات $P(y \le K) = 0.2578 = A$

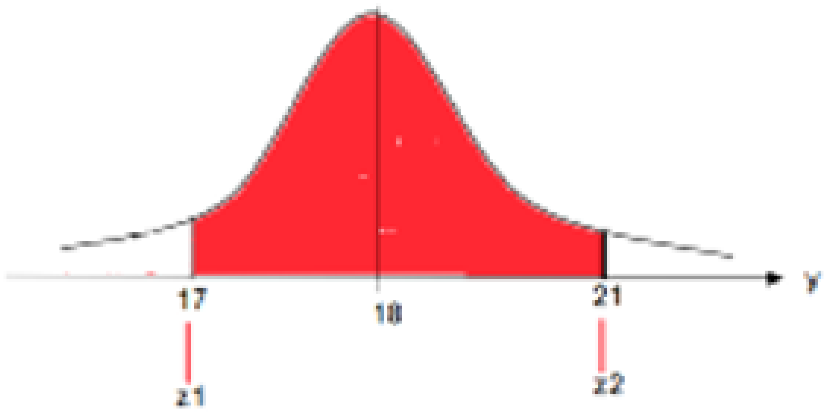
$0.2578 = p(z \le z_1)$; $z_1 = \frac{k-18}{2.5}$ $\rightarrow k = 18 + 2.5\, z_1$

$\rightarrow$ Table $\rightarrow z_1 = -0.65$

$\rightarrow k = 18 + 2.5(-0.65) = 16.375$



$$P(17 < y \le 21) = P(Z_1 < Z \le Z_2)$$



$$z_1 = \frac{17-18}{2.5} = -0.4 \; ; \qquad z_2 = \frac{21-18}{2.5} = 1.2$$

$$P(-0.4 < Z \le 1.2) = P(Z \le 1.2) - P(Z \le -0.4)$$

Using table $\rightarrow$ $= 0.8849 - 0.3446 = 0.5403$

ت- العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي

في حالة n كبيرة وp غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر. ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} P(a \le z \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \qquad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

ويسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5.

قاعدة التقريب:

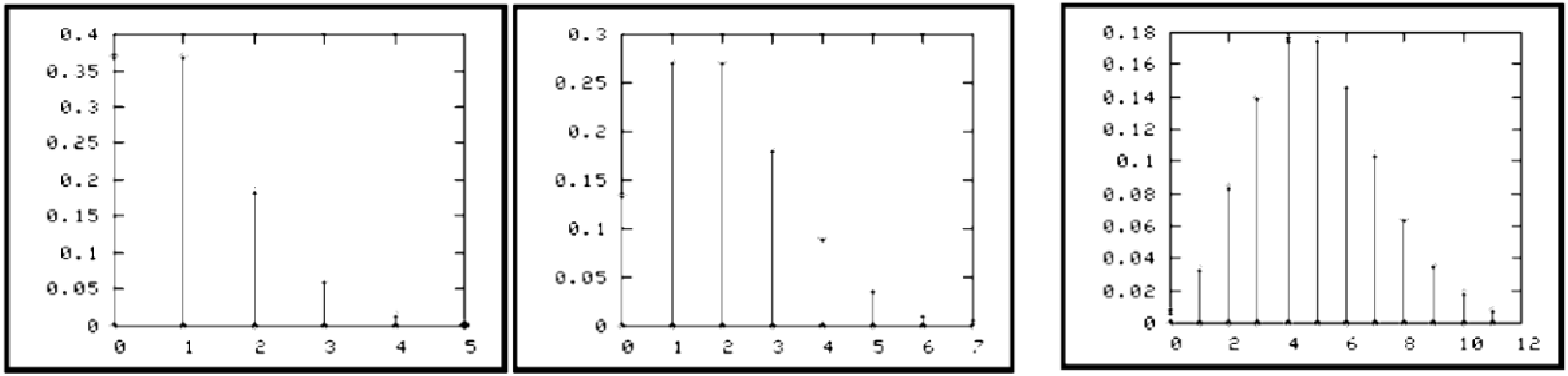
- عموما نعتبر التقريب إلى التوزيع الثنائي ملائما عندما np و nq كلاهما أكبر من 5.
- عدد من الاحصائيين[2] يعتمد قاعدة أخرى هي أن يكون أحد الشرطين التاليين متوفرين:

$$npq \ge 9 \qquad \textbf{or} \qquad n \ge 20,\ np \ge 10,\ nq \ge 10$$

ت- العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون

عندما $\lambda \to \infty$ فإن التوزيعين الطبيعي وبواسون يعطيان نتائج متطابقة . ونكتب:

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left(a \le \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$



رسم 7 سلوك توزيع بواسون عند زيادة المعلمة من 1 إلى 2 إلى 5 (من اليسار إلى اليمين)

قاعدة التقريب:

- عموما نعتبر أن التقريب ملائم من التوزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي عندما $\lambda \ge 10$
- فيما يعتمد عدد من الإحصائيين[3] كشرط للتقريب $\lambda \ge 15$. **ويمكن أن تتقارب نتائج التوزيعات الثلاث معا: الثنائي، بواسون والطبيعي حسب الشروط المذكورة**